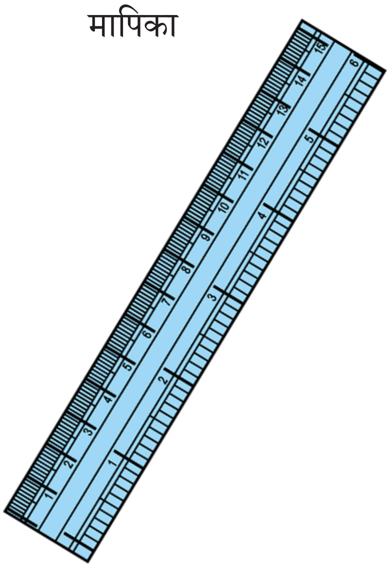
प्रायोगिक-ज्यामितिः

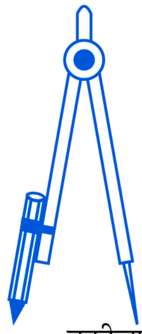
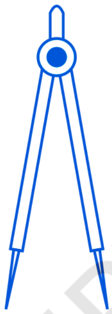
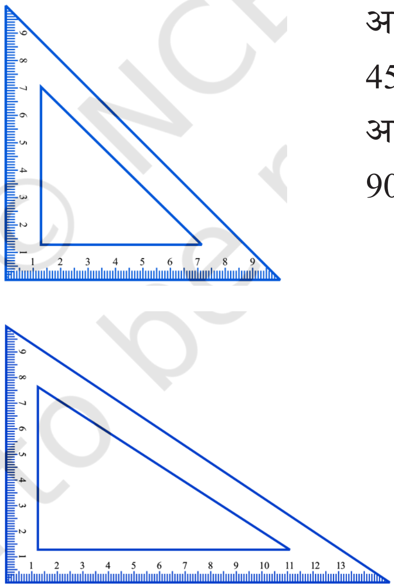
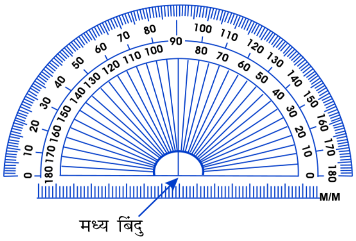
अध्यायः 14

14.1 भूमिका

वयम् अनेकप्रकारकान् आकारान् पश्यामः, यैः वयं परिचिताः स्मः। वयं बहुचित्राणि रचयामः। तेषु चित्रेषु विभिन्नाः आकाराः निहिताः भवन्ति। वयम् एतेषु आकारेषु केषाञ्चन आकाराणां विषये पूर्वतन-अध्यायेषु पठिताः अपि स्मः। भवन्तः एतेषाम् आकाराणाम् एकां सूचीं निर्मान्तु यत् एते येन प्रकारेण प्रकटिताः भवन्ति।

अस्मिन् अध्याये वयम् एतान् आकारान् निर्मातुं शिक्षामः। एतान् निर्मातुम् अस्माभिः यन्त्राणां विषये ज्ञातव्यं भवति। आयान्तु, एतानि यन्त्राणि पश्यामः तथा तेषां नाम अपि च प्रयोगस्य विषये ज्ञानं प्राप्स्यामः।

क्र.सं.	नाम	आकृतिः	विवरणम्	प्रयोगः
1.	मापिका		सैद्धान्तिक-रूपेण एकस्यां मापिकायां किमपि चिह्नं न भवति। परन्तु भवतां ज्यामिति-पेटिकायाः मापिकायां एकस्मिन् प्रान्तभागे सेण्टीमीटर् इत्यस्मिन् चिह्नानि भवन्ति। (तथा अपरस्मिन् भागे चिह्नानि इञ्च् (inch) मध्ये भवन्ति।)	रेखाखण्डानाम् आलेखनं तथा च तेषां दीर्घतानां मापनम्

2.	परकारः  	अस्य शीर्षद्वयं भवति। एकं शीर्षं तीक्ष्णं भवति। अपरे च अङ्कनी-स्थापनस्थानं भवति।	समान-दीर्घताः अङ्कयितुं किन्तु मापनं कर्तुं नास्ति। अर्धवृत्तम् अपि च वृत्तम् आलेखितुम् अस्य उपयोगं कुर्मः।
3.	विभाजनी 	अस्य तीक्ष्णं शीर्षद्वयं भवति।	दीर्घतानां तोलनं कर्तुम् अस्य उपयोगं कुर्मः।
4.	वर्गमापिका 	त्रिभुजाकारवस्तुद्वयम् अस्ति। एकस्मिन् कोणाः 45°, 45°, 90° सन्ति। अपरे कोणाः 30°, 60°, 90° सन्ति।	दीर्घ-रेखाणां तथा समानान्तररेखाणाम् आलेखनम्।
5.	चान्द्रिका  	एकम् अर्धवृत्ताकारं वस्तु अस्ति यस्योपरि 180 भागाः चिह्निताः भवन्ति। एतत् मापनं दक्षिणतः 0° तः आरभ्य 180° पर्यन्तं भवति अपि च वामतः 0° तः आरभ्य 180° पर्यन्तं भवति।	कोणानाम् आलेखनं तथा मापनम्।

वयं **मापिकायाः परिकरस्य च रचनायाः** उपरि विचारं कर्तुं गच्छन्तः स्मः। एतयोः केवलं रेखानाम् आलेखने मापिकायां प्रयोगं तथैव केवलं अर्धवृत्तस्य आलेखने परिकरस्य प्रयोगं कुर्मः। एतासां रचनानां निर्माणसमये पूर्णम् अवधानं ददतु। अत्र भवतां साहाय्यार्थं काश्चन सूचनाः दीयमानाः सन्ति।

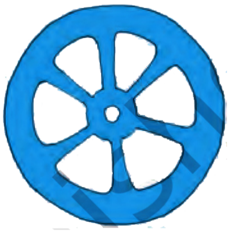
(a) पूर्वं रेखाः आलिखन्तु अपि च साधारण-बिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु।

(b) स्वस्य मापकानि तीक्ष्णशीर्षाणि कृशप्रान्तभागानि च निर्माय स्थापयन्तु।

(c) स्वपेटिकायां अङ्कनीद्वयं स्थापयन्तु। एका परिकारे योजयितुम् अन्या च रेखायाः, अर्धवृत्तस्य आलेखने अथवा बिन्दूनाम् अङ्कनार्थम् उपयुज्येते।

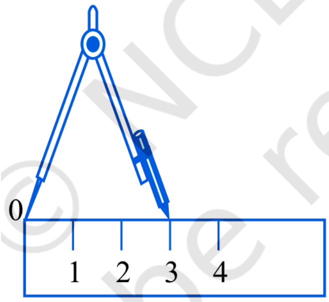
14.2 वृत्तः

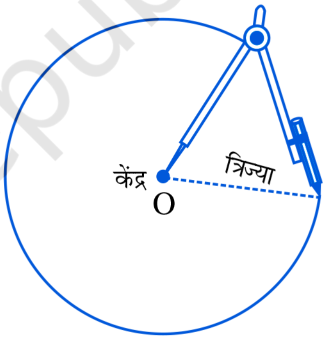
दर्शितानि चक्राणि पश्यन्तु। अस्य परिसीमायाः उपरि स्थितः प्रत्येकं बिन्दुः अस्य केन्द्रात् समाने दूरे अस्ति। किं भवन्तः इतोऽपि अन्यवस्तूनि वक्तुं शक्नुवन्ति तथा तेषाम् आलेखनं कर्तुं शक्नुवन्ति ? एतादृशपञ्चवस्तूनां विषये चिन्तयन्तु यानि एतत् आकारकाणि स्युः।



14.2.1 यदा वृत्तस्य त्रिज्या ज्ञाता भवेत् तदा तस्य आलेखनम्।

भावयन्तु वयं 3 सेमी त्रिज्यायाः एकं वृत्तम् आलेखितुम् इच्छामः इति। अस्माभिः अत्र परकारस्य प्रयोगः कर्तव्यः। वयम् अधोलिखित-सोपानानाम् अनुसरणं कर्तुं शक्नुमः।





सोपानम् 1 : परिकरं 3 सेमी वाञ्छितत्रिज्यायाः कृते उद्घाटयन्तु।

सोपानम् 2 : एकस्याः तीक्ष्णाङ्कन्याः तं बिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु यं वयं वृत्तस्य केन्द्रं कर्तुम् इच्छामः। तं बिन्दुं O इति नामनिर्देशनं कुर्वन्तु।

सोपानम् 3 : परिकरस्य तीक्ष्णशीर्षं बिन्दोः O इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु।

सोपानम् 4 : वृत्तम् आलेखितुं परिकरं मन्दं मन्दं भ्रामयन्तु। ध्यानं भवतु यत् वृत्तम् एकवारमेव पूर्णं भवेत्।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु।

किं भवन्तः केन्द्रं O इति, एकं बिन्दुं P इति च स्वीकृत्य कति वृत्तान् आलेखितुं शक्नुवन्ति ?

अभ्यासः 14.1

1. 3.2 से.मी. त्रिज्यायाः एकं वृत्तम् आलिखन्तु।

2. एकमेव केन्द्रं O स्वीकृत्य 4 सेमी अपि च 2.5 सेमी त्रिज्यायाः वृत्तद्वयम् आलिखन्तु।
3. एकं वृत्तम् अपि च तस्य व्यासद्वयम् आलिखन्तु। यदि भवन्तः एतयोः व्यासयोः शीर्षाणि योजयेयुः, तर्हि कीदृशी आकृतिः प्राप्यते ? यदि व्यासः परस्परं दीर्घता भवेत् तर्हि आकृतिः कीदृशी भवति ? भवन्तः स्वस्य उत्तरस्य परीक्षणं केन प्रकारेण कुर्वन्ति ?
4. एकं वृत्तम् आलिखन्तु तथा च बिन्दून् A,B,C अनेन प्रकारेण अङ्कितान् कुर्वन्तु यत्
   (a) A वृत्तस्य उपरि स्थितः स्यात्।
   (b) B वृत्तस्य अभ्यन्तरे स्थितः स्यात्।
   (c) C वृत्तस्य बहिर्भागे स्थितः स्यात्।
5. भावयन्तु A अपि च B द्वयोः वृत्तयोः समान-त्रिज्या-युक्तौ केन्द्रौ स्तः। एतौ अनेन प्रकारेण आलिखन्तु यथा एकः वृत्तः अपरवृत्तस्य केन्द्रं स्पृष्ट्वा गच्छेत्। एतौ C अपि च D इत्यनयोः उपरि प्रतिच्छेदं कर्तुं त्यजन्तु। $\overline{AB}$ अपि च $\overline{CD}$ परस्परं समकोणे एव स्तः वा इति परीक्षणं कुर्वन्तु।

14.3 एकः रेखाखण्डः

स्मरन्तु यत् एकस्मिन् रेखाखण्डे द्वौ अन्त्यबिन्दू भवतः। अतः एव वयम् अस्य दीर्घतां मापिकया मापनं कर्तुं शक्नुमः। यदि अस्माभिः कस्यापि रेखाखण्डस्य दीर्घता ज्ञातः स्यात् तर्हि एतम् एकया आकृतिना निरूपणं कर्तुं शक्नुमः। आयान्तु, पश्याम यत् वयम् इत्थं कथं कुर्मः इति।

14.3.1 एकस्य दत्त-दीर्घतायाः रेखाखण्डस्य संरचना

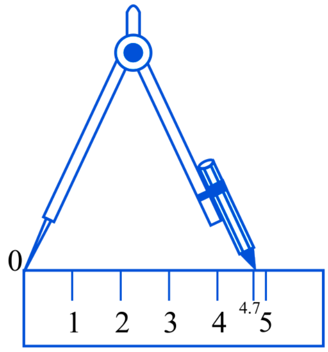
भावयन्तु यत् वयं 4.7 से.मी. दीर्घतायाः एकस्य रेखाखण्डस्य रचनां कर्तुम् इच्छामः। वयं मापिकायाः प्रयोगं कृत्वा 4.7 से.मी. दूरे बिन्दुद्वयं A अपि च B इति अङ्कितं कुर्मः। A अपि च B इत्यनयोः मेलनं कुर्मः चेत् अस्माभिः रेखाखण्डः $\overline{AB}$ इति प्राप्यते। बिन्दुं A अपि च B इत्यस्य अङ्कनसमये अस्माभिः मापिकायां साक्षात् अधः द्रष्टव्यम्। अन्यथा अस्माभिः समीचीनम् उत्तरं न प्राप्यते।

मापिका तथा च परकार इति यन्त्रस्य प्रयोगः

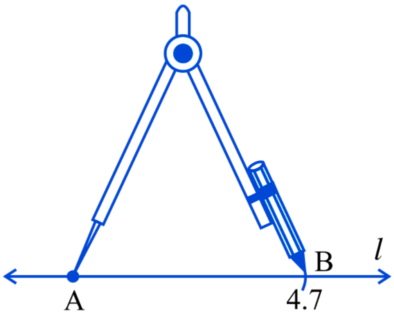
एकः समुचितविधिः एषः भवति यत् दत्त-दीर्घतायाः एकस्य रेखाखण्डस्य रचनां कर्तुं परिकारः इति यन्त्रस्य प्रयोगः कर्तव्यः।

सोपानम् 1 : एकां रेखां l आलिखन्तु अपि च तस्याः उपरि एकं बिन्दुं A इत्याख्यम् अङ्कयन्तु।

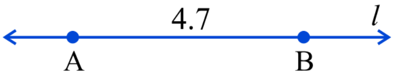
सोपानम् 2 : परिकारस्य तीक्ष्णप्रान्तभागं मापिकायाः शून्यस्य उपरि स्थापयन्तु। परकारम् एवम् उद्घाटयन्तु यत् अङ्कनीसहितप्रान्तः 4.7 से.मी. चिह्नस्य उपरि आगच्छेत्।



सोपानम् 3 : परिकारस्य विस्तरणे किमपि परिवर्तनं न स्यात्, तस्य तीक्ष्णं प्रान्तं A इत्यस्मिन् बिन्दौ स्थापयन्तु अपि च l इत्याख्यं B इत्यस्य उपरि कर्तयन्तः एकम् अर्धवृत्तं स्थापयन्तु।

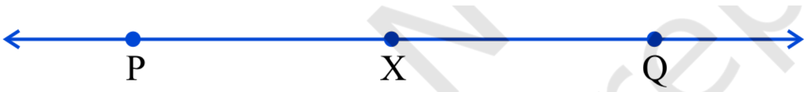


सोपानम् 4 : — वाञ्छित-दीर्घतायाः 4.7 से.मी. मापस्य एकः रेखाखण्डः अस्ति।



अभ्यासः 14.2

1. मापिकायाः प्रयोगं कृत्वा 7.3 दीर्घतायाः एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु।
2. मापिकायाः अपि च परकारस्य प्रयोगं कुर्वन्तः 5.6 से.मी. दीर्घतायाः एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु।
3. 7.8 से.मी. दीर्घतायाः AB इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु। अस्मिन् AC कर्तयन्तु यस्य दीर्घता 4.7 से.मी. भवेत्। BC इत्यस्य मापनं कुर्वन्तु।
4. 3.9 से.मी. दीर्घतायाः एकः रेखाखण्डः AB दत्तः अस्ति। एकं रेखाखण्डं PQ आलिखन्तु यः AB इति रेखाखण्डस्य द्विगुणितः स्यात्। मापयित्वा परीक्षणं कुर्वन्तु।



(सङ्केतः – $\overline{AB}$ इत्यनेन समानं $\overline{PX}$ रेखाखण्डं निर्मान्तु ; अनन्तरं पुनः $\overline{AB}$ इत्यनेन समानं $\overline{XQ}$ इत्यस्य कर्तनं कुर्वन्तु।)

5. 7.3 से.मी. दीर्घतायाः AB रेखाखण्डः तथा च 3.4 से.मी. दीर्घतायाः CD रेखाखण्डश्च दत्तः अस्ति। एकं रेखाखण्डं XY आलिखन्तु यतः XY इत्यस्य दीर्घता AB अपि च CD इत्यनयोः लम्बयोः अन्तरेण समानः अस्ति।

14.3.2 एकेन रेखाखण्डेन समानरेखाखण्डस्य संरचना

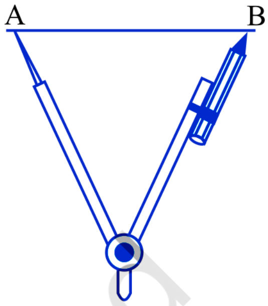
भावयन्तु यत् भवन्तः एतादृशस्य एकस्य रेखाखण्डस्य रचनां कर्तुम् इच्छन्ति यत् यस्य दीर्घता दत्तस्य एकस्य रेखाखण्डस्य $\overline{AB}$ इत्यस्य दीर्घतया समानं स्यात्।

एकः शीघ्रविधिः अपि च स्वाभाविकविधिः एषः भविष्यति यत् भवन्तः मापिकायाः प्रयोगं कुर्युः। (यस्योपरि सेण्टी.मीटर् अपि च मिलीमीटर् इत्यनयोः चिह्नानि अङ्कितानि स्युः।) तया $\overline{AB}$ इत्यस्य मापनं कृतं स्यात् अपि च पुनः तस्य एव दीर्घतायाः प्रयोगं कृत्वा एकः रेखाखण्डः $\overline{CD}$ इत्याख्यः आलिखितः स्यात्। एकः अपरः विधिः एषः भविष्यति यत् एकस्य पारदर्शक-कागदस्य प्रयोगं कृत्वा $\overline{AB}$ इत्याख्यं कागदस्य अन्यस्मिन् भागे अभिलेखः कृतः भवेत्। परन्तु एतैः विधिभिः सर्वदा समीचीनः एव परिणामः न प्राप्यते।

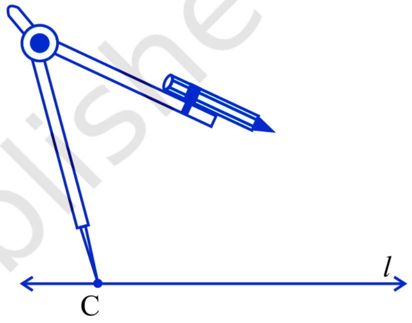
एकः इतोऽपि समुचितविधिः भवति यत् रचनार्थं मापिका अपि च परिकरस्य इत्यस्य प्रयोगः कृतः स्यात्। $\overline{AB}$ इत्यस्य रचनार्थम् अधोलिखितानि सोपानानि अनुसरामः।

सोपानम् 1 : रेखाखण्डः $\overline{AB}$ दत्तः अस्ति, यस्य दीर्घता ज्ञातः नास्ति।

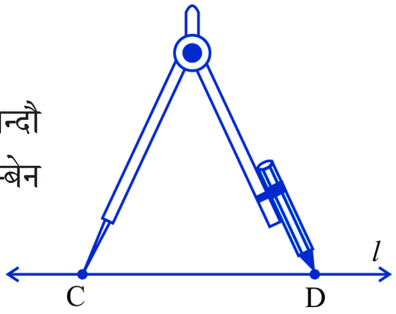
सोपानम् 2 : परिकरस्य इत्यस्य तीक्ष्णप्रान्तं A इत्यस्य परिकरस्य एवम् अङ्कनीं B इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु। परकार इत्यस्य उद्घाटितभागः $\overline{AB}$ इत्यस्य दीर्घतां वदति।



सोपानम् 3 : कामपि रेखां l आलिखन्तु। l इत्यस्य उपरि कमपि C इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। परिकरस्य विस्तरणे किमपि परिवर्तनं विना तस्य तीक्ष्णप्रान्तं C इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु।



सोपानम् 4 : एकम् अर्धवृत्तं निर्मान्तु यः l इति रेखां D इति बिन्दौ कर्तयेत्। अधुना $\overline{CD}$ एव $\overline{AB}$ इत्यस्य लम्बेन समानः रेखाखण्डः अस्ति।



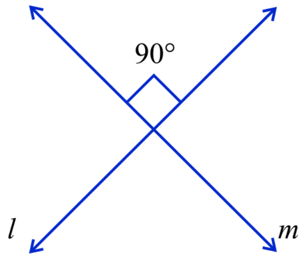
अभ्यासः 14.3

1 कमपि रेखाखण्डं $\overline{PQ}$ आलिखन्तु। मापनम् अकृत्वैव $\overline{PQ}$ इत्यनेन समानम् एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु।

2. रेखाखण्डः $\overline{AB}$ दत्तः अस्ति यस्य दीर्घता ज्ञातः नास्ति। एकस्य $\overline{PQ}$ PQ इति रेखाखण्डस्य रचनां कुर्वन्तु यस्य दीर्घता $\overline{AB}$ इत्यस्य दीर्घतायाः द्विगुणितः अस्ति।

14.4 लम्बरेखाः

भवन्तः जानन्ति यत् द्वे रेखे परस्परं लम्बरेखे इत्युच्येते यदि ते इत्थं प्रतिच्छेदं कुरुतः यत् तयोः मध्यस्थकोणः समकोणः स्यात्। संलग्नाकृतौ l अपि च m परस्परं लम्बरेखे स्तः। एकं पूर्ण-कागदम्

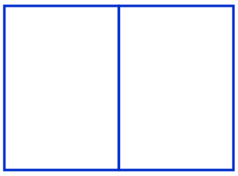


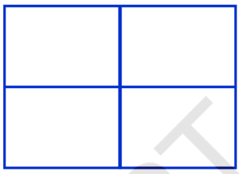
अथवा अभ्यास-पुस्तकस्य प्रान्तभागः दर्शयति यत् द्वे रेखे परस्परं समकोणे स्तः।

एतत् कुर्वन्तु

भवन्तः स्वपरिवेशे कुत्र कुत्र लम्बरेखाः पश्यन्ति ?

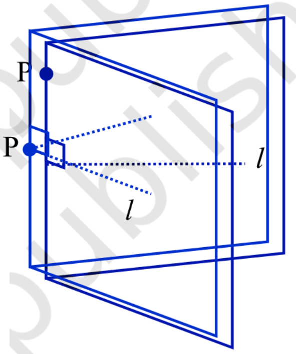
एकं कागदं स्वीकुर्वन्तु अपि च तन्मध्ये पुटीकुर्वन्तु तथा पुटचिह्नं निर्मान्तु। एतदेव कागदं मध्ये अन्यस्मिन् दिशि पुटीकुर्वन्तु । पुटचिह्नं निर्मान्तु अपि च कागदम् उद्घाटयन्तु। द्वे अपि पुटचिह्ने परस्परं लम्बौ स्तः।





14.4.1 एकस्याः दत्तरेखायाः उपरि स्थितबिन्दोः लम्बालेखनम्

एका रेखा l कागदे उपरि आलिखिता अस्ति अपि च P इति तस्य उपरि स्थितः एकः बिन्दुः अस्ति। l इत्यस्य उपरि P इत्यस्मात् लम्बालेखनं सरलम् अस्ति।



वयं कागदं केवलम् इत्थं पुटीकर्तुं शक्नुमः यत् पुटचिह्नस्य द्वितीयपार्श्वे स्थितस्य l इत्यस्य भागः परस्परं आच्छादयेत् । वर्गाङ्कितकागदं अथवा पारदर्शकं कागदं क्रियाकलापाय सम्यक् भवति । आयान्तु, एकं कागदं स्वीकुर्वन्तु अपि च तस्योपरि l आलिखन्तु। अधुना l इत्यस्य उपरि कमपि बिन्दुं P इति अङ्कितं कुर्वन्तु।

अधुना कागदम् इत्थं पुटीकुर्वन्तु यत् l स्वस्योपरि एव परावर्तिता भवेत्। अर्थात् स्वस्य उपरि पतेत्। पुटचिह्नम् इत्थं समायोजितं कुर्वन्तु यत् तत् P इत्यस्मात् गच्छेत्। कागदम् उद्घाटयन्तु। पुटचिह्नं P इत्यस्मात् गच्छत् रेखायाः l इत्यस्य उपरि दीर्घता अस्ति।

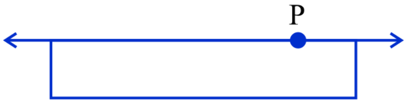
चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु लिखन्तु च

भवन्तः अस्य परीक्षणं कथं कुर्वन्ति यत् एषा रेखा l इत्यस्य उपरि दीर्घता अस्ति ? ध्यानं ददातु यत् रेखा P इत्यस्मात् गच्छति।

एकम् आह्वानम् : मापिकायाः अपि च च वर्गमापिकायाः साहाय्येन लम्बालेखनम् (एकः ऐच्छिकः क्रियाकलापः)।

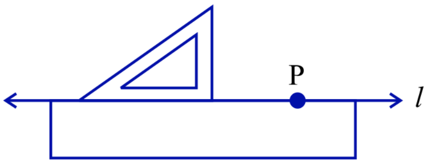
सोपानम् 1 : एका रेखा l एवम् एकः बिन्दुः P दत्तः अस्ति। ध्यानं ददतु यत् P इति बिन्दुः l इति रेखायाः उपरि अस्ति।

सोपानम् 2 : मापिकायाः एकं प्रान्तभागं रेखायाः l इत्यस्याः अनुदिशं

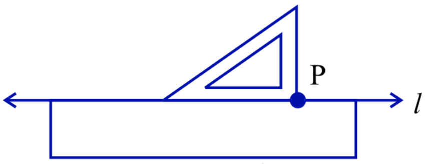


स्थापयन्तु अपि च दृढतया गृह्णन्तु।

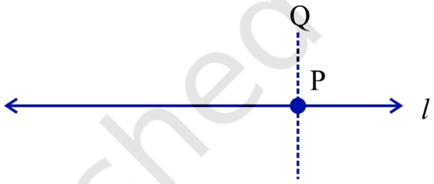
सोपानम् 3 : एकां वर्गमापिकाम् इत्थं l इति रेखायाः उपरि स्थापयन्तु यत् तस्याः समकोणं निर्मीयमाणः एकः प्रान्तः मापिकायाः तस्य प्रान्तभागस्य अनुदिशि भवेत् या रेखा l इत्यनया रेखया सह युक्ता अस्ति तथा वर्गमापिकायाः समकोणयुक्तकोणः अपि मापिकायाः स्पर्शनं कुर्यात्।



सोपानम् 4 : वर्गमापिकां मापिकायाः अनुदिशि तावत् पर्यन्तम् अपसारयन्तु यावत् पर्यन्तं तस्याः समकोणयुक्तः कोणः P इति बिन्दोः उपरि नागच्छेत्।



सोपानम् 5 : अस्यां स्थितौ वर्गमापिकां दृढतया गृहीत्वा तिष्ठन्तु। वर्गमापिकायाः समकोणस्य अपरप्रान्तस्य अनुदिशि $\overline{PQ}$ आलिखन्तु।

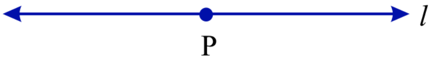


$\overline{PQ}$ रेखा l इति रेखायाः दीर्घता अस्ति। (भवन्तः एतत् दर्शयितुं सङ्केतं $\perp$ इदं कथं प्रयोगं कुर्वन्ति ?)

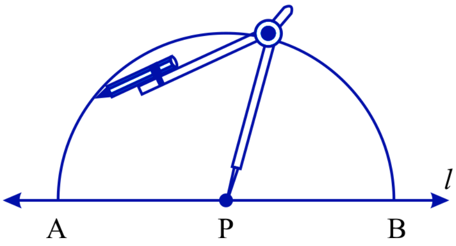
P इति बिन्दोः उपरि सम्भूतकोणं मापयित्वा रचनायाः अस्याः परीक्षणं कुर्वन्तु। किं वयं मापिकायाः स्थाने रचनायाः अस्याः कृते अपरवर्ग-मापिकायाः प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः ? अस्मिन् विषये चिन्तयन्तु।

मापिकायाः अपि च परकारस्य विधिः

ज्यामित्यां लम्बम् आलेखितुं यस्य विधेः कृते प्राथम्यं दीयते सः एव मापिका-परिकारविधिः अस्ति। इमां रचनाम् अधः प्रस्तुतीकुर्मः।

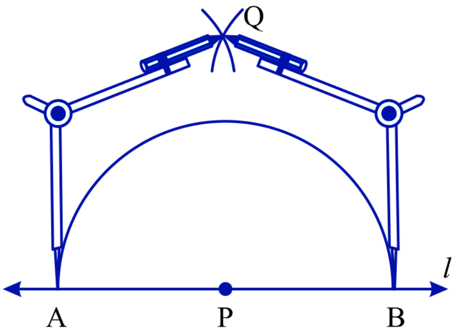


सोपानम् 1 : एकस्याः l इति रेखायाः उपरि P इति बिन्दुः दत्तः अस्ति।

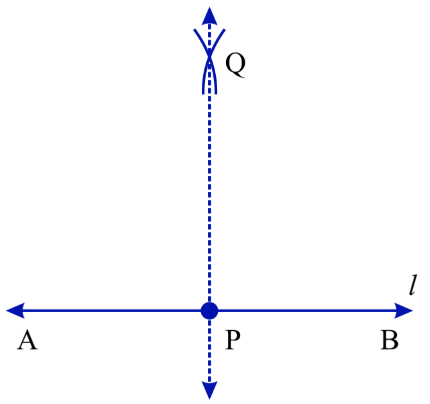


सोपानम् 2 : P इत्याख्यं बिन्दुं केन्द्रः इति मत्वा तथा च एकां सौविध्यदायकं त्रिज्यां स्वीकृत्य एकम् अर्धवृत्तं निर्मान्तु यः l इत्याख्यं A अपि च B इति बिन्दुद्वये प्रतिच्छेदयेत्।

सोपानम् 3 : A अपि च B एतद् द्वयं केन्द्रौ इति मत्वा अपि च AP इत्यस्मात् अधिकत्रिज्यां स्वीकृत्य द्वयोः चापयोः रचनां कुर्वन्तु यौ परस्परं Q इत्यस्य उपरि कर्तयेताम्।



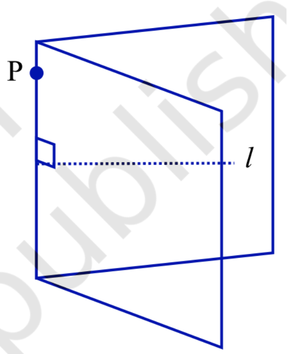
सोपानम् 4 : PQ इत्याख्यं योजयन्तु तदा $\overleftrightarrow{PQ}$ एव l इत्यस्याः उपरि दीर्घता अस्ति। वयम् इदं $\overleftrightarrow{PQ} \perp l$ इति लिखामः।



14.4.2 एकस्याः रेखायाः उपरि तस्मात् बिन्दोः दीर्घता यः तस्याः उपरि स्थितः नास्ति

एतत् कुर्वन्तु

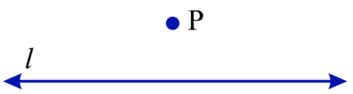
यदि अस्माकं कृते l इति दीर्घता दत्तः अस्ति एवम् एकः तादृशः बिन्दुः दत्तः अस्ति यः l इति रेखायाः उपरि स्थितः नास्ति तर्हि P इत्यस्मात् चलन्तं रेखायाः l इत्यस्याः उपरि लम्बम् आलेखितुं वयं पूर्वं कागदपुटी-करणस्य सरलं क्रियाकलापं कर्तुं शक्नुमः।



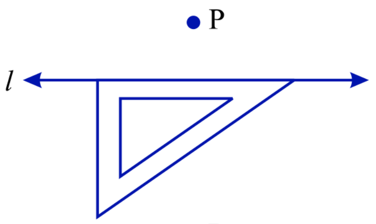
एकं कागदं स्वीकुर्वन्तु (पारदर्शकं स्यात्)। तस्योपरि एकां रेखां l इति आलिखन्तु अपि च कमपि बिन्दुं P इति अङ्कितं कुर्वन्तु यः l इत्यस्याः उपरि स्थितः न स्यात्। कागदम् इत्थं पुटीकुर्वन्तु यत् पुटस्य चिह्नं P इत्यस्मात् गच्छेत् तथा l इति रेखायाः एकः भागः तस्याः अपरे भागे तिष्ठेत्। कागदम् उद्घाटयन्तु। पुटस्य चिह्नं l इत्यस्याः लम्बम् अस्ति अपि च P इत्यस्मात् गच्छति।

मापिकायाः अपि च वर्गमापिकायाः विधिः (एकः ऐच्छिकः क्रियाकलापः)

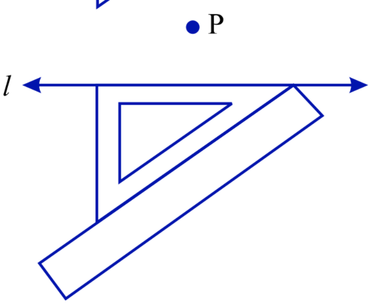
सोपानम् 1 : भावयन्तु यत् l एका रेखा अस्ति अपि च P तस्याः बहिः स्थितः एकः बिन्दुः अस्ति।



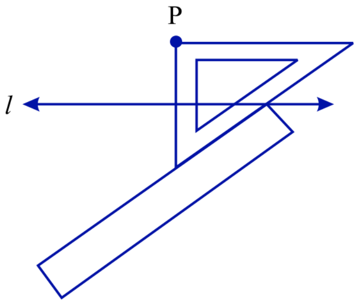
सोपानम् 2 : एकां वर्गमापिकां l इत्यस्याः उपरि इत्थं स्थापयन्तु यत् तस्याः समकोणस्य एकः प्रान्तः l इत्यस्याः अनुदिशि भवेत्।



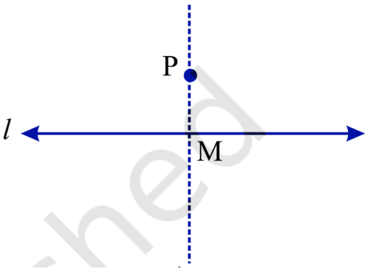
सोपानम् 3 : वर्गमापिकायाः समकोणानां सम्मुखप्रान्तस्य अनुदिशि एकां मापिकां स्थापयन्तु।



सोपानम् 4 : मापिकां दृढतया गृह्णन्तु अपि च वर्गमापिकां मापिकायाः अनुदिशि तावत् पर्यन्तम् अपसारयन्तु यावत् पर्यन्तं P समकोण-निर्मातारम् अपरं प्रान्तभागं न स्पर्शति।

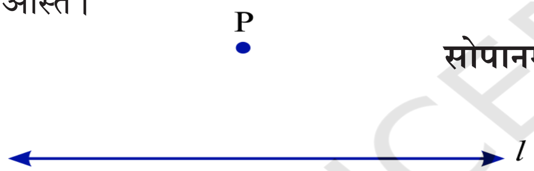


सोपानम् 5 : वर्गमापिकायाः अस्य प्रान्तभागस्य अनुदिशि P इत्यस्मात् रेखाम् आलिखन्तु या l इत्याख्यं M इत्यत्र कर्तयति। अधुना रेखा PM ⊥ l अस्ति।



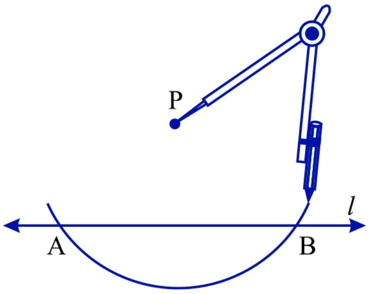
मापिकायाः अपि च परिकरस्य विधिः

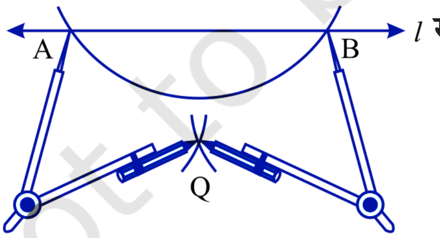
निस्संशयं मापिकायाः तथा परिकरस्य प्रयोगं कृत्वा यः विधिः उपयुज्यते सः एव विधिः उत्तमविधिः अस्ति।



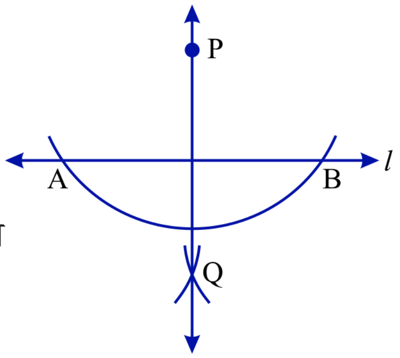
सोपानम् 1 : रेखा l तथा बिन्दुः P दत्तः अस्ति यः l इत्यस्याः उपरि स्थितः नास्ति।

सोपानम् 2 : P इत्याख्यं केन्द्रः इति मत्वा एकां सौविद्ध्यदायकीं त्रिज्यां स्वीकृत्य एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु यः l इति रेखां द्वयोः बिन्द्वोः A अपि च B इत्यनयोः उपरि कर्तयेत्।





सोपानम् 3 : समानत्रिज्यायाः प्रयोगेण A अपि च B इत्येतौ केन्द्रौ इति मत्वा अर्धवृत्तद्वयम् आलिखन्तु यौ परस्परं P इत्यस्य अन्यपार्श्वे Q इत्यस्य उपरि कर्तयेताम्।



सोपानम् 4 : PQ इत्याख्यं योजयन्तु। तदा PQ एव l इति रेखायाः उपरि दीर्घता अस्ति।

अभ्यासः 14.4

1. एकं रेखाखण्डम् $\overline{AB}$ आलिखन्तु। एतस्यां कमपि M इति बिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु। मापिकायाम् अपि च वर्गमापिकायाः साहाय्येन M इत्यस्मात् $\overline{AB}$ इत्यस्योपरि लम्बम् आरचयन्तु।
2. एकं रेखाखण्डम् $\overline{PQ}$ आलिखन्तु। कमपि R इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु यः $\overline{PQ}$ इत्यस्य उपरि न भवेत्। R इत्यस्मात् $\overline{PQ}$ इत्यस्मिन् एकं लम्बम् आलिखन्तु। (मापिकायाः तथा वर्गमापिकायाः साहाय्येन)
3. एकां रेखां l आलिखन्तु अपि च तस्याः उपरि स्थितात् एकस्मात् X इति बिन्दोः l इति रेखायाःउपरि एकं दीर्घतां रेखाखण्डं $\overline{XY}$ इति आलिखन्तु।
   अधुना मापिकायाः तथा परकार इत्यस्य साहाय्येन Y इत्यस्मात् $\overline{XY}$ इत्यस्याः उपरि लम्बम् आलिखन्तु।

14.4.3 एकस्य रेखाखण्डस्य लम्ब-समद्विभाजकः

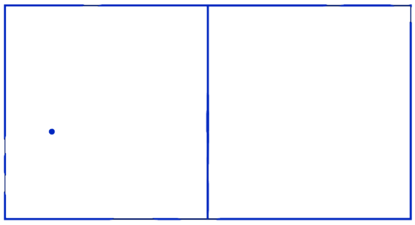
एतत् कुर्वन्तु

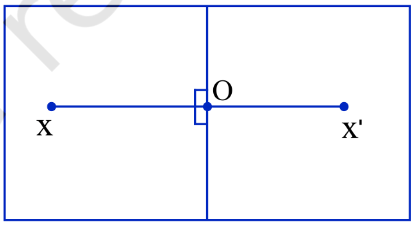
एकं कागदं पुटीकुर्वन्तु। भावयन्तु यत् $\overline{AB}$ पुटचिह्नम् अस्ति। मशिं स्वीकृत्य कुत्रापि एकं X इति बिन्दुम् आलिखन्तु।

$\overline{AB}$ इत्याख्यं दर्पणरेखा इति मत्वा X इत्यस्य प्रतिबिम्बं X' इत्याख्यं जानन्तु।

भावयन्तु यत् $\overline{AB}$ अपि च $\overline{XX'}$ परस्परं O इत्यस्य उपरि प्रतिच्छेदं कुरुतः। किं OX = OX' अस्ति ?

अस्यार्थः अस्ति यत् $\overline{AB}$ रेखाखण्डः $\overline{XX'}$ इत्याख्यं द्वाभ्यां समान-लम्ब-भागाभ्यां विभाजनं करोति । $\overline{AB}$ रेखाखण्डः $\overline{XX'}$ इत्यस्य समद्विभाजकः अस्ति । एतदपि ध्यायन्तु यत् $\angle AOX$ अपि च $\angle BOX$ समकोणौ भवतः । किमर्थम् ? अतः रेखा $\overline{AB}$ रेखाखण्डस्य $\overline{XX'}$ इत्यस्य समद्विभाजकः अस्ति। आकृतौ वयं $\overline{AB}$ इति रेखायाः केवलम् एकमेव भागं पश्यामः। द्वे बिन्दू संयुज्यमान-रेखाखण्डस्य लम्बसमद्विभाजकः तस्य सममिति-अक्षः अपि अस्ति।



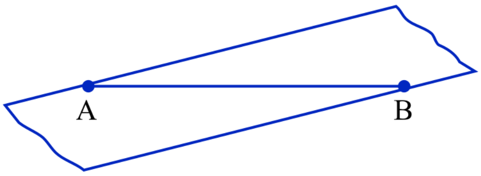


एतत् कुर्वन्तु

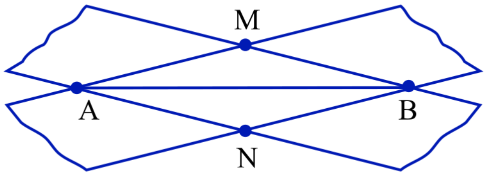
(पारदर्शकमापिका-पट्टिका)

सोपानम् 1 : एकं AB इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु।

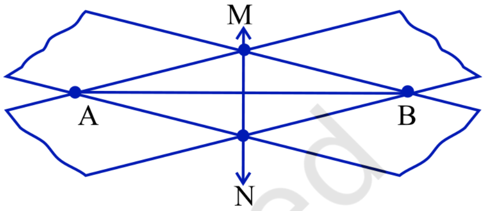
सोपानम् 2 : यथा चित्रे दर्शितं तथा च एकाम् आयताकार-पारदर्शक-मापिका-पट्टिकां AB इत्यस्याः रेखायाः विकर्णतः इत्थं स्थापयन्तु यत् अस्य प्रान्तभागौ AB इति बिन्दोः इत्यस्य उपरि स्याताम्।



सोपानम् 3 : इमामेव प्रक्रियाम् एकाम् अन्यां पट्टिकां स्वीकृत्य इत्थम् अग्रेसारयन्तु यत् द्वितीया पट्टिका प्रथमां पट्टिकां A अपि च B इत्यनयोः उपरि कर्तयेत्। भावयन्तु यत् द्वे अपि पट्टिके M अपि च N इत्यनयोः उपरि अपि कर्तयतः।



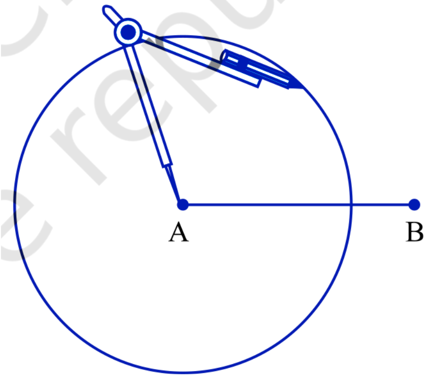
सोपानम् 4 : M अपि च N इत्यनयोः समायोजनं कुर्वन्तु। किं $\overline{MN}$ रेखाखण्डस्य समद्विभाजकः अस्ति ? मापयित्वा परीक्षणं कुर्वन्तु। किं एषः $\overline{AB}$ इत्यस्य लम्बसमद्विभाजकः अपि वर्तते ? $\overline{AB}$ इत्यस्य मध्यबिन्दुः कुत्र अस्ति ?



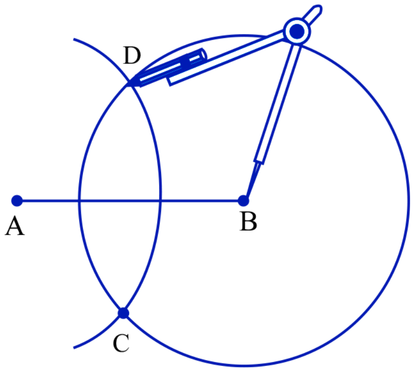
मापिकायाः तथा परिकरस्य साहाय्येन रचना

सोपानम् 1 : एकं $\overline{AB}$ इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु।

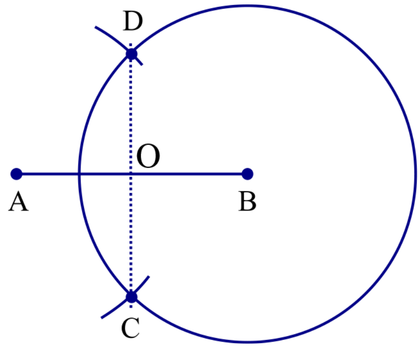
सोपानम् 2 : A इत्याख्यं केन्द्रः इति मत्वा परिकरस्य साहाय्येन एकं वृत्तम् आलिखन्तु। भवतां वृत्तस्य त्रिज्या, $\overline{AB}$ इत्यस्य अर्धात् अपि अधिका भवेत्।



सोपानम् 3 : B इत्याख्यं केन्द्रः इति मत्वा अपि च द्वितीयसोपाने कथित-त्रिज्यां स्वीकृत्य परिकरस्य साहाय्येन एकम् अन्यं वृत्तम् आलिखन्तु। भावयन्तु सः वृत्तः पूर्वतनं वृत्तं C, D इति बिन्द्वोः उपरि कर्तयेत्।



सोपानम् 4 : CD इत्याख्यं मेलयन्तु। एषः रेखाखण्डः $\overline{AB}$ इत्याख्यं O इत्यत्र कर्तयति। स्वस्य विभजन्याः प्रयोगं कृत्वा परीक्षणं कुर्वन्तु यत् O इति बिन्दुः, रेखाखण्डस्य $\overline{AB}$ इत्यस्य मध्यबिन्दुः अस्ति। सहैव एतदपि परीक्षन्तु यत् $\angle COA$ अपि च $\angle COB$ समकोणौ स्तः। अतः $\overline{CD}$ इति रेखाखण्डः $\overline{AB}$ इति रेखाखण्डस्य लम्बसमद्विभाजकः अस्ति।



उपर्युक्तरचनायाम् अस्माभिः $\overline{CD}$ इत्याख्यं निर्धारयितुं द्वयोः बिन्द्वोः आवश्यकता आसीत्। किं एतौ ज्ञातुं पूर्णवृत्तालेखनस्य आवश्यकता अस्ति ? किम् एतत् पर्याप्तं नास्ति यत् एतौ बिन्दू ज्ञातुं एतयोः वृत्तयोः अर्धवृत्तद्वयम् एव आलिखितं स्यात् । वस्तुतः तु व्यावहारिक-रूपेण वयम् इदमेव कुर्मः।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

मापिकायाः तथा च परकारस्य साहाय्येन रचनायाः द्वितीये सोपाने, यदि वयं त्रिज्यां $\overline{AB}$ इत्यस्य अर्धादपि न्यूनां स्वीकुर्म तर्हि किं भविष्यति ?

अभ्यासः 14.5

1. 7.3 सेण्टीमीटर् दीर्घतायाः एकं $\overline{AB}$ इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु अपि च तस्य सममिति-अक्षं जानन्तु।
2. 9.5 से.मी. दीर्घतायाः एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु अपि च तस्य लम्ब-समद्विभाजकम् आलिखन्तु।
3. एकस्य $\overline{XY}$ इत्यस्य रेखाखण्डस्य लम्ब-सम-द्विभाजकम् आलिखन्तु यस्य दीर्घता 10.3 से.मी. भवेत्।
   (a) अस्य लम्बसमद्विभाजकस्य उपरि कमपि P इति बिन्दुं स्वीकुर्वन्तु। परीक्षणं कुर्वन्तु यत् PX = PY अस्ति वा इति।
   (b) XY इति रेखाखण्डस्य मध्यबिन्दुः M अस्ति तर्हि MX अपि च XY इत्यनयोः विषये भवन्तः किं वक्तुं शक्नुवन्ति ?
4. 12.8 से.मी. दीर्घतायाः एकं रेखाखण्डम् आलिखन्तु। मापिकायाः अपि च परिकरः इत्यस्य साहाय्येन अमुं समानेषु चतुर्षु भागेषु विभजन्तु। मापनद्वारा स्व-रचनायाः परीक्षणं कुर्वन्तु।
5. 6.1 सेमी दीर्घतायाः एकं $\overline{PQ}$ इति रेखाखण्डम् आलिखन्तु अपि च पुनः $\overline{PQ}$ इत्याख्यं व्यासः इति मत्वा एकं वृत्तम् आलिखन्तु।

6. केन्द्रं C इति अपि च त्रिज्यां 3.4 से.मी. स्वीकृत्य एकं वृत्तम् आलिखन्तु। अस्य कामपि जीवरेखां $\overline{AB}$ आलिखन्तु। $\overline{AB}$ इत्यस्याः जीवरेखायाः लम्बसम-द्विभाजकम् आलिखन्तु। परीक्षणं कुर्वन्तु यत् किम् एषः वृत्तस्य केन्द्रात् गच्छति वा इति ?

7. AB इत्याख्यं व्यासं इति स्वीकृत्य प्रश्नः 6 पुनः स्वीकुर्वन्तु।

8. 4 से.मी. त्रिज्यायुक्तम् एकं वृत्तम् आलिखन्तु । अस्य द्वे जीवरेखे आलिखन्तु । एतयोः लम्बसमद्विभाजकम् आलिखन्तु। एते कुत्र मिलतः ?

9. शीर्षम् O इति युक्तं कोणम् आलिखन्तु। अस्य एकस्य भुजस्य उपरि एकं बिन्दुं A इति द्वितीयभुजे एकं अपरं बिन्दुं B इति इत्थं स्वीकुर्वन्तु यत् OA = OB अस्ति। $\overline{OA}$ अपि च $\overline{OB}$ इत्यनयोः लम्बसमद्विभाजकम् आलिखन्तु । भावयन्तु यत् एतौ P इत्यस्य उपरि प्रतिच्छेदं कुरुतः इति। किं PA = PB अस्ति ?

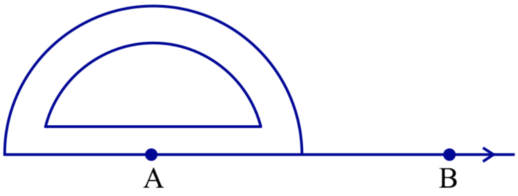
14.5 कोणः

14.5.1 दत्तमापस्य कोणनिर्माणम्

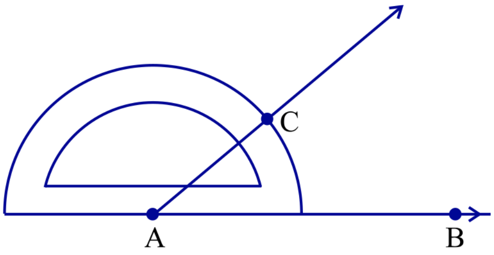
भावयन्तु यत् वयं 40° इत्यस्य कोणं निर्मातुम् इच्छामः। एतदर्थं वाञ्छित-सोपानानि अधोलिखितानि सन्ति।

सोपानम् 1 : एकं किरणं $\overrightarrow{AB}$ इति आलिखन्तु।

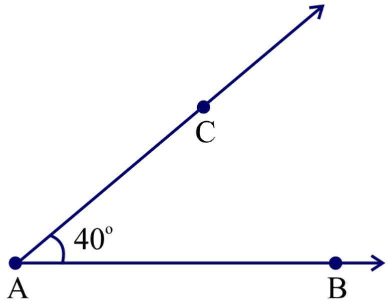
सोपानम् 2 : चान्द्रिकायाः केन्द्रं A इत्यस्य उपरि इत्थं स्थापयन्तु यत् अस्याः शून्यप्रान्तः (0° - 0°) किरणस्य $\overrightarrow{AB}$ इत्यस्य अनुदिशि भवतु।



सोपानम् 3 : B इत्यस्य समीपे विद्यमानशून्येन प्रारभ्य 40° इत्यस्य सम्मुखे C इति बिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु।



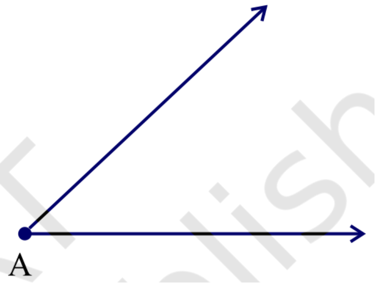
सोपानम् 4 : AC मेलयित्वा किरणं AC इति निर्मान्तु। ∠BAC एव वाञ्छितकोणः अस्ति।



14.5.2 एकेन दत्तेन कोणेन समानस्य कोणस्य निर्माणम्

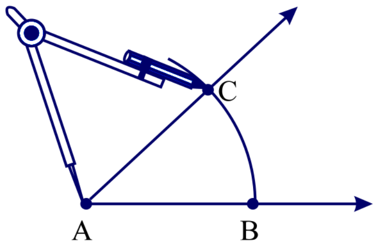
भावयन्तु अस्माकं कृते एकः कोणः दत्तः अस्ति यस्य मापः अस्माभिः ज्ञातः नास्ति। वयं एतेन कोणेन समानम् एकं कोणं निर्मातुम् इच्छामः। पश्यन्तु यत् केन प्रकारेण कर्तुं शक्यते।

∠A दत्तः अस्ति यस्य मापः ज्ञातः नास्ति।

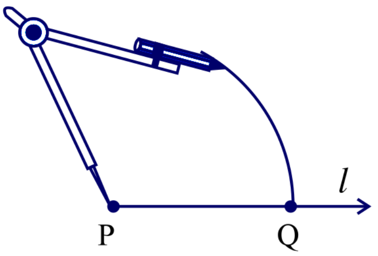


सोपानम् 1 : एकां रेखां l आलिखन्तु अपि च तस्याः उपरि एकं बिन्दुं P इति अङ्कितं कुर्वन्तु।

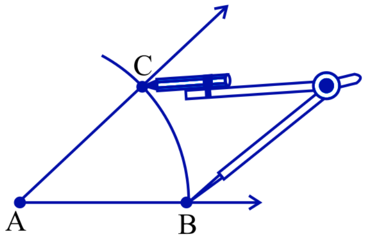
सोपानम् 2 : परिकरस्य तीक्ष्णशीर्षं A इत्यस्य उपरि स्थापयित्वा एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु यः ∠A इत्यस्य भुजौ B अपि च C इत्यस्य उपरि कर्तयति।



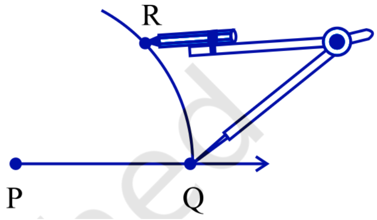
सोपानम् 3 : परिकरस्य विस्तरणे परिवर्तनम् अकृत्वैव तस्य तीक्ष्णशीर्षं P इत्यस्य उपरि स्थापयित्वा एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु यः l इत्याख्यां रेखां Q इत्यस्य उपरि कर्तयति।



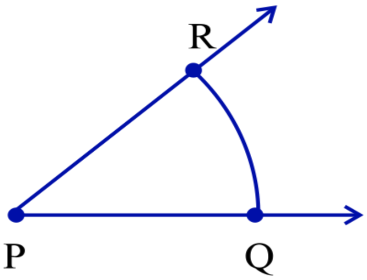
सोपानम् 4 : **परिकरस्य** BC इत्यस्य लम्बेन समानम् उद्घाटयन्तु ।



सोपानम् 5 : परिकरस्य तीक्ष्णशीर्षं Q इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु तत्र अर्धवृत्तं स्थापयन्तु यः पूर्वार्धवृत्तं R इत्यस्य उपरि कर्तयति ।

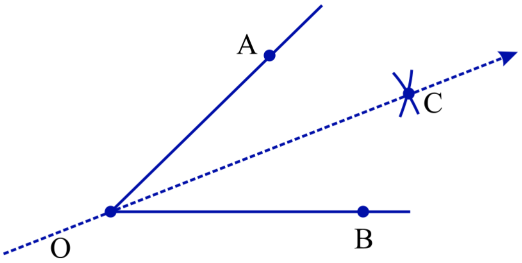


सोपानम् 6 : PR इत्याख्यं PR इति किरणं निर्मान्तु । तेन $\angle P$ प्राप्यते । $\angle P$ एव वाञ्छितकोणः अस्ति यस्य मापः $\angle A$ इत्यनेन समानम् अस्ति । अस्यार्थः अयमस्ति यत् $\angle QPR$ अपि च $\angle BAC$ इत्यनयोः मापः समानः अस्ति ।



14.5.3 एकस्य कोणस्य समद्विभाजकः

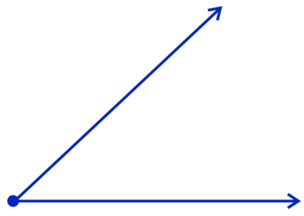
एकस्य कागदस्य उपरि एकं O इति बिन्दुम् अङ्कयन्तु । O इति प्रारम्भिकबिन्दुं स्वीकृत्य किरणद्वयं $\overrightarrow{OA}$ अपि च $\overrightarrow{OB}$ आलिखन्तु । भवद्भिः $\angle AOB$ प्राप्यते । एतत् कागदम् इत्थं पुटीकुर्वन्तु यत् पुटचिह्नं O इत्यस्मात् गच्छेत् तथा किरणौ $\overrightarrow{OA}$ अपि च $\overrightarrow{OB}$ परस्परं सम्मेलयेताम् । भावयन्तु यत् OC पुटचिह्नम् अस्ति । यत् अस्माभिः कागदस्य उद्घाटनेन प्राप्यते । नूनं किरणः OC, $\angle AOB$ इत्यस्य सममिति-अक्षः अस्ति ।



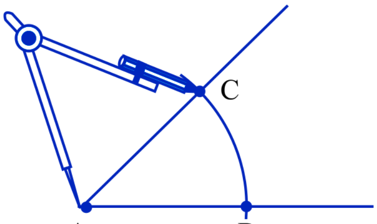
$\angle AOB$ अपि च $\angle COB$ एतत् द्वयं मापयन्तु । किम् एतौ समानौ स्तः ? अतः OC, कोणस्य $\angle AOC$ इति कोणस्य सममिति-अक्षः अस्ति अपि च $\angle AOB$ इति कोणस्य समद्विभाजकः अस्ति ।

मापिकया अपि च परकारेण रचना

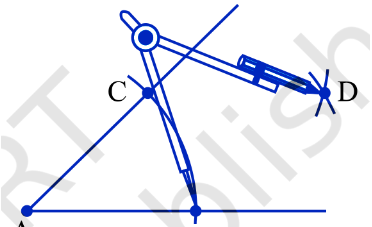
चिन्तयन्तु, यत् एकः ∠A इति कोणः दत्तः अस्ति।



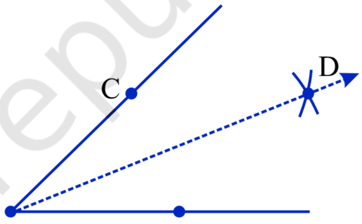
सोपानम् 1 : A इत्याख्यं केन्द्रः इति मत्वा परकारस्य साहाय्येन एकम् अर्धवृत्तं निर्मान्तु यः ∠A इत्यस्य भुजौ B अपि च C इत्यनयोः उपरि कर्तयति।



सोपानम् 2 : B इत्याख्यं केन्द्रः इति मत्वा BC इत्यस्य अर्धादपि अधिकां त्रिज्यां स्वीकृत्य एकम् चापं ∠A इत्यस्य अभ्यन्तरे आलिखन्तु।



सोपानम् 3 : C इत्याख्यं केन्द्रः इति मत्वा द्वितीयसोपाने उक्तत्रिज्यां स्वीकृत्य ∠A इत्यस्य अभ्यन्तरे तोऽपि एकम् चापम् आलिखन्तु । भावयन्तु यत् एतौ द्वावपि अर्धवृत्तौ D इत्यस्मिन् बिन्दौ प्रतिच्छेदयतः । तदा $\overline{AD}$ एव ∠A इत्यस्य वाञ्छितसमद्विभाजकः भवति।



उपर्युक्त-द्वितीय-सोपाने यदि वयं त्रिज्यां BC इत्यस्य अर्धादपि न्यूनं स्वीकुर्मः तर्हि कः कोणः भविष्यति ?

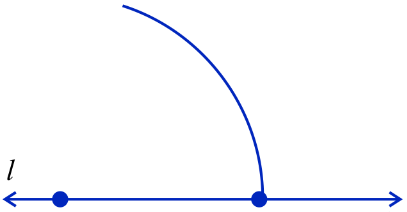
14.5.4 विशेषमापानां कोणः

केषाञ्चन विशेषमापानां कोणानां रचनां कर्तुं केचन सुन्दराः अथवा परिशुद्धाः विधयः सन्ति, येषु चान्द्रिकायाः प्रयोगः न क्रियते। एतेषु काञ्चन विधीन् वयं पश्यामः।

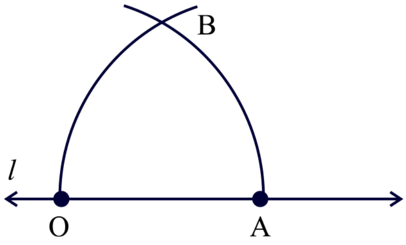
60° मापस्य कोणस्य रचना

सोपानम् 1 : एकां रेखां l आलिखन्तु अपि च तस्याः उपरि O इति बिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु।

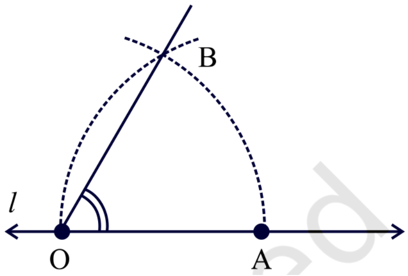
सोपानम् 2 : परिकरस्य तीक्ष्णशीर्षं O इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु अपि च एकं सौविध्यदायकीं त्रिज्यां स्वीकृत्य एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु यः PQ इति रेखां A इति बिन्दौ कर्तयति।



सोपानम् 3 : अधुना A इत्याख्यं केन्द्रं विचिन्त्य O इत्यस्मात् चलन्तम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु।



सोपानम् 4 : भावयन्तु द्वौ अपि अर्धवृत्तौ B इत्यस्मिन् बिन्दौ कर्तयतः। OB इत्येतौ योजयित्वा OB इत्याख्यं किरणं निर्मान्तु। तदा कोणः ∠BOA एव 60° मापस्य वाञ्छितकोणः अस्ति।



30° मापस्य कोणस्य रचना

उपरि दर्शितरीत्या 60° मापस्य कोणम् आलिखन्तु। अधुना अमुं कोणं समद्विभाजकं कुर्वन्तु। प्रत्येकं कोणः 30° इत्यस्य अस्ति। मापनद्वारा स्व-रचनायाः परीक्षणं कुर्वन्तु।

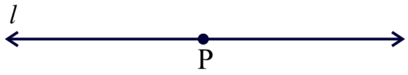
प्रयत्नं कुर्वन्तु

15° इत्यस्य कोणं भवन्तः केन प्रकारेण कर्तुं शक्नुवन्ति ?

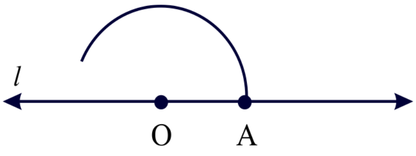
120° इत्यस्य कोणस्य रचना

120° इत्ययं कोणः 60° कोणस्य द्विगुणितः अस्ति। अतः अस्य रचना अधोलिखितप्रकारेण भवितुं शक्यते।

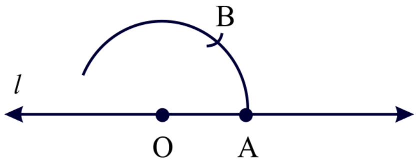
सोपानम् 1 : एकां रेखां l आलिखन्तु अपि च तस्याः उपरि O इति बिन्दुम् अङ्कितं कुर्वन्तु।



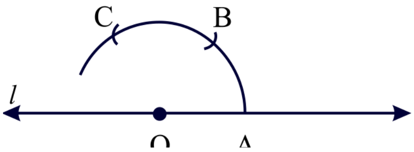
सोपानम् 2 : परकारस्य तीक्ष्णशीर्षं O इत्यस्य उपरि स्थापयन्तु अपि च एकं सौविध्यदायकीं त्रिज्यां स्वीकृत्य एकम् अर्धवृत्तम् आलिखन्तु यः l इति रेखां A बिन्दौ कर्तयति।



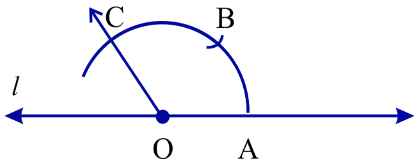
सोपानम् 3 : अधुना A इत्याख्यं केन्द्रं विचिन्त्य एकम् चापम् आलिखन्तु यः पूर्वम् अर्धवृत्तं B इत्यस्य उपरि कर्तयति।



सोपानम् 4 : पुनः B इत्याख्यं केन्द्रं विचिन्त्य एकम् चापं आलिखन्तु यः पूर्वम् अर्धवृत्तं C इत्यस्य उपरि कर्तयति।



सोपानम् 5 : OC योजयित्वा OC इत्याख्यं किरणं निर्मान्तु । तदा $\angle COA$ इत्यस्य कोणस्य मापः 120° अस्ति ।



प्रयत्नं कुर्वन्तु

150° इत्यस्य कोणं भवन्तः केन प्रकारेण कर्तुं शक्नुवन्ति ?

90° मापस्य कोणस्य रचना

एकस्याः रेखायाः उपरि दत्तबिन्दोः एकं लम्बम् आलिखन्तु यः पूर्वमेव कृतः अस्ति । एषः वाञ्छितस्य 90° मापस्य कोणः अस्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

45° इत्यस्य कोणं भवन्तः केन प्रकारेण कर्तुं शक्नुवन्ति ?

अभ्यासः 14.5

1. 75° मापस्य कोणस्य $\angle POQ$ इत्यस्य रचनां कुर्वन्तु तथा च अस्य सममिति-अक्षम् आलिखन्तु ।
2. 147° मापस्य कोणस्य रचनां कुर्वन्तु अपि च तस्य समद्विभाजकम् आलिखन्तु ।
3. एकं समकोणम् आलिखन्तु अपि च तस्य समद्विभाजकस्य रचनां कुर्वन्तु ।
4. 153° मापस्य एकं कोणम् आलिखन्तु अपि च अस्य चतुरः समानान् भागान् कुर्वन्तु ।
5. मापिकया तथा च परकार इत्यनेन च अधोलिखितानां मापानां कोणान् आलिखन्तु ।
   (a) 60° (b) 30° (c) 90° (d) 120° (e) 45° (f) 135°
6. 45° मापस्य एकं कोणम् आलिखन्तु । तथा च तस्य समद्विभाजकं कुर्वन्तु ।
7. 135° मापस्य एकं कोणम् आलिखन्तु तेन समद्विभाजितं कुर्वन्तु ।
8. 70° मापस्य एकं कोणम् आलिखन्तु । मापिकायाः तथा परकार इत्यस्य साहाय्येन अनेन कोणेन समानम् एकं कोणं निर्मान्तु ।
9. 40° मापस्य एकं कोणम् आलिखन्तु । अस्य सम्पूरकेण समानम् एकं कोणं निर्मान्तु ।

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः

अस्मिन् अध्याये ज्यामितीय-आकाराणाम् आलेखनस्य विभिन्न-विधयः दर्शिताः सन्ति ।

1. आकाराणां रचनार्थं वयं ज्यामिति-पेटिकायां विद्यमानानाम् अधोलिखितवस्तूनां प्रयोगं कृतवन्तः ।
   (i) मापिका (ii) परिकरः इति
   (iii) विभाजनी (iv) वर्गमापिका
   (v) चान्द्रिका

2. मापिकायाः अपि च परिकरस्य साहाय्येन अधोलिखितानां रचनां कर्तुं शक्नुमः ।

(i) एकः वृत्तः यदि तस्य त्रिज्यायाः दीर्घता दत्ता अस्ति ।

(ii) एकः रेखाखण्डः यदि तस्य दीर्घता दत्ता अस्ति ।

(iii) एकेन रेखाखण्डेन समानस्य रेखाखण्डस्य निर्माणम् ।

(iv) एकस्याः रेखायाः उपरि एकस्मात् बिन्दोः लम्बालेखनं यदि सः बिन्दुः –

(a) रेखायाः उपरि स्थितः अस्ति । (b) रेखायाः उपरि स्थितः नास्ति ।

(v) दत्तदीर्घतायाः रेखाखण्डस्य लम्बसमद्विभाजकः ।

(vi) दत्तमापस्य एकः कोणः ।

(vii) दत्तकोणेन समानस्य कोणस्य निर्माणम् ।

(viii) दत्तकोणस्य समद्विभाजकः ।

(ix) केषाञ्चित् विशेषाणां मापानां कोणाः यथा –

(a) 90° (b) 45° (c) 60° (d) 30° (e) 120° (f) 135°